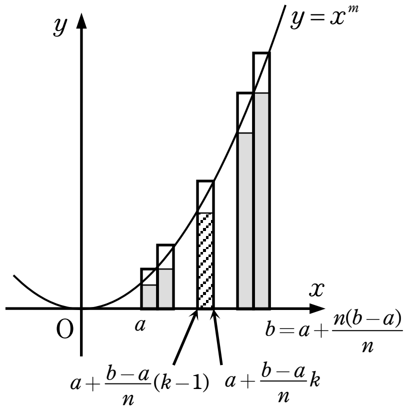
区分求積法

$y=x^m$（m は正の整数）と x 軸および 2 直線 $x=a$, $x=b$（$a<b$）で囲まれる図形の面積 S を，定積分を用いずに区分求積法で求めてみよう。

(Ⅰ)　区間 $[a, b]$ を n 等分する分割で考えてみよう。



右図のように，囲まれた図形を覆いつくるように作る n 個の長方形の面積の総和を S_n，囲まれた図形に含まれるように作る n 個の長方形の面積の総和を s_n とする。

s_n について，左から k 本目の長方形は，横が $\dfrac{b-a}{n}$，縦が $\left(a+\dfrac{b-a}{n}(k-1)\right)^m$ だから，その面積は

$\dfrac{b-a}{n}\times\left(a+\dfrac{b-a}{n}(k-1)\right)^m$ で表される。

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{b-a}{n}\times\left(a+\frac{b-a}{n}(k-1)\right)^m$$

同様に，　$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{b-a}{n}\times\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)^m$

と表される。よって，

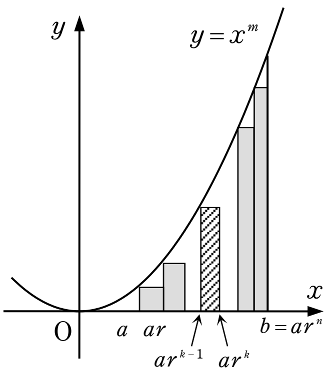
$$S=\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(a+\frac{b-a}{n}(k-1)\right)^m \quad \text{または，} S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)^m$$

である。これを計算するには，一般の m に対する $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^m$ の公式が必要であるから，これ以上計算することができない。

(Ⅱ)　区間 $[a, b]$ を次のように分割する。

$$a=ar^0<ar<ar^2<\cdots\cdots<ar^{n-1}<ar^n=b \qquad \text{ただし，} r=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} \text{である。}$$

この分割を用いて，S を求めてみょう。



右図のように，囲まれた図形に含まれる n 個の長方形の面積の総和 t_n を考える。

左から k 本目の長方形は，底辺の長さが

$$ar^k-ar^{k-1}=ar^{k-1}(r-1)$$

高さが　$\left(ar^{k-1}\right)^m$ であるから，その面積は，

$$ar^{k-1}(r-1)\times\left(ar^{k-1}\right)^m=\left(ar^{k-1}\right)^{m+1}(r-1)$$

よって，囲まれた図形の面積 S は

$$S=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(ar^{k-1}\right)^{m+1}(r-1)$$

$$=\lim_{n\to\infty}a^{m+1}(r-1)\sum_{k=1}^{n}\left(r^{m+1}\right)^{k-1}=\lim_{n\to\infty}a^{m+1}(r-1)\times\frac{\left(r^{m+1}\right)^n-1}{r^{m+1}-1} \quad \cdots\cdots①$$

ここで，$r=\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$ より，$\left(r^{m+1}\right)^n=\left(r^n\right)^{m+1}=\left(\dfrac{b}{a}\right)^{m+1}$ で，$n\to\infty$ のとき，$r=\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}\to\left(\dfrac{b}{a}\right)^0=1$

$$\frac{r-1}{r^{m+1}-1}=\frac{1}{\dfrac{r^{m+1}-1}{r-1}}=\frac{1}{r^m+r^{m-1}+\cdots+r+1}\to\frac{1}{m+1}$$

①より，　$S=a^{m+1}\times\dfrac{1}{m+1}\left\{\left(\dfrac{b}{a}\right)^{m+1}-1\right\}=\dfrac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}$

囲まれた図形を覆いつくす n 個の長方形の面積の総和 T_n についても同様である。